Ergänzung zum schulinternen Lehrplan – Dokumentation der Nutzung des GTR

Die Nutzung des GTR im zweiten Prüfungsteil verkürzt den Rechenaufwand enorm. Dies erscheint manchmal befremdlich, man fragt sich vielleicht, wo die mathematischen Kompetenzen des Prüflings liegen. Letztlich sind aber einerseits die Nutzung des GTR, andererseits das Erkennen der Lösungsmöglichkeiten und Lösungswege aber auch nachgewiesene mathematische Kompetenzen. Das „klassische Berechnen“ (z. B. Gleichungen lösen usw.) sind Kompetenzen, die nur im ersten Prüfungsteil ohne Hilfsmittel von Hand durchzuführen sind.

Der Dokumentation im GTR-Teil kommt durch die hohen Nutzungsmöglichkeiten des GTR damit aber eine große Bedeutung zu.

Grundsätzlich gilt:
Lösungswege müssen dokumentiert werden. Die Angabe von GTR-Befehlen ist KEINE Dokumentation. Sie muss auch nicht ergänzend angeben werden, dies ist nicht von den Prüflingen zu erwarten.

Die nachfolgend angeführten Dokumentationen sind vollauf korrekt, ausreichend und erfordern die Vergabe der maximalen Punktzahl.
Es gilt stets: Eine rechnerische Lösung (Operatoren „Berechnen“ bzw. „rechnerisch Bestimmen“) ist immer auch eine vollwertige Lösung bei den Operatoren „Ermitteln“ bzw. „Bestimmen“ (andersherum gilt dies aber natürlich nicht!).

„Berechnen“ bzw. „rechnerisch Bestimmen“ erfordert immer die rechnerischen Ansätze bei allen einzelnen Lösungsschritten, Argumentationen über die Anschauungen sind an keiner Stelle gestattet (so muss z.B. auch bei gesuchten y-Werten de rechnerische Ansatz f(…)=… notiert sein und es kann nicht einfach ein Punkt angegeben werden) – damit darf (theoretisch) das Graphik-Menü hierbei nicht verwendet werden.

„Bestimmen“ bzw. „Ermitteln“ erfordert eine durchweg nachvollziehbare Dokumentation aller Lösungsschritte. Wenn das Graphikmenü genutzt wurde (nicht nur zulässig, sondern ausdrücklich gewünscht), so muss dies z.B. über die Formulierung „GTR liefert mittels graphischer Analyse“ angezeigt werden.

Rundungen und exakte Lösungen:
Bei den Operatoren „rechnerisch bestimmen“, „berechnen“, … werden in der Regel keine exakten Werte erwartet, wenn dies nicht anders aus der Aufgabenstellung hervorgeht.
Bei den Operatoren „nachweisen“ oder „zeigen“ werden dann exakte Werte erwartet, wenn dies aus dem geforderten Nachweis hervorgeht.
Grundsätzlich gilt: Die im Unterricht etablierten Konventionen gelten: Die Lehrkraft entscheidet, ob z.B. $x = \pm\sqrt{2}$ als Lösungen von $x^2 = 2$ erwartet wird oder $x \approx \pm 1{,}41$ ausreicht.

Beispiel 1 - Analysis

$f(x) = -\frac{1}{10}x^5 + 2x^4 - x^3 + 1$

a) OPERATOR die Nullstellen der Funktion. b) OPERATOR die Extrempunkte der Funktion.

c) OPERATOR die Wendepunkte der Funktion.

Beim Operator „ANGEBEN"

a) Nullstelle: $x \approx 19{,}49$

b) lokaler Hochpunkt: $H(15{,}62 \mid 22263)$, lokaler Tiefpunkt: $T(0{,}38 \mid 0{,}99)$

c) Wendepunkte: $W_1(0 \mid 1)$; $W_2(0{,}26 \mid 0{,}99)$; $W_3(11{,}74 \mid 14074)$

	Operatoren „ERMITTELN" oder „BESTIMMEN"	**Operatoren „Berechnen" oder „rechnerisch Bestimmen"**
a)	$f(x) = 0$, GTR liefert als Lösung: $x \approx 19{,}49$ [Alternative: Durch Anschauung und Untersuchung des Graphen ergibt sich $x \approx 19{,}49$]	$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{10}x^5 + 2x^4 - x^3 + 1 = 0$, GTR liefert als Lösung: $x \approx 19{,}49$
b)	Gesucht sind die lokalen Extrempunkte von f. GTR liefert über eine graphische Analyse als lokalen Hochpunkt: $H(15{,}62 \mid 22263)$ GTR liefert über eine graphische Analyse als lokalen Tiefpunkt: $T(0{,}38 \mid 0{,}99)$	Gesucht sind die lokalen Extrempunkte von f. $f'(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 8x^3 - 3x^2$; $f''(x) = -2x^3 + 24x^2 - 6x$ notw. Bed. $f'(x) = 0$ $0 = -\frac{1}{2}x^4 + 8x^3 - 3x^2$ mit GTR: $x_1 \approx 0{,}38$ und $x_2 \approx 15{,}62$ hinr. Bed. $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$ $f''(0{,}38) \approx 1{,}08$ >0 → T $f''(15{,}62) \approx -1860$ <0 → H da $f(0{,}38) \approx 0{,}99$ folgt: $T(0{,}38 \mid 0{,}99)$ da $f(15{,}62) \approx 22263$ folgt: $H(15{,}62 \mid 22263)$
c)	Die Wendestellen von f entsprechen den lokalen Extrempunkten von f'. Für f' gilt: $f'(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 8x^3 - 3x^2$. GTR liefert über eine graphische Analyse als lokale Extrempunkte und damit als Wendepunkte von f: $W_1(0 \mid 1)$; $W_2(0{,}26 \mid 0{,}99)$; $W_3(11{,}74 \mid 14074)$	$f'''(x) = -6x^2 + 48x - 6$ notw. Bed. $f''(x) = 0$ $0 = -2x^3 + 24x^2 - 6x$ mit GTR: $x_1 = 0$ und $x_2 \approx 0{,}26$ und $x_3 \approx 11{,}74$ hinr. Bed. $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$ $f'''(0) = -6$ <0 → W $f'''(0{,}26) \approx 6{,}1$ >0 → W $f'''(11{,}74) \approx -269$ <0 → W da $f(0) = 1$ folgt: $W_1(0 \mid 1)$ da $f(0{,}26) \approx 0{,}99$ folgt: $W_2(0{,}26 \mid 0{,}99)$ da $f(11{,}74) \approx 14074$ folgt: $W_3(11{,}74 \mid 14074)$

Beispiel 2 - Analysis

Die Funktion $h(t) = 0{,}6t^3 - 9t^2 + 400$ mit $0 \le t \le 15$ beschreibt die Flughöhe (in m) eines Ballons in Abhängigkeit der Zeit t (in Minuten) im angegebenen Zeitintervall.

a) OPERATOR die Flughöhe nach 3 Minuten.

b) OPERATOR die minimale Flughöhe des Ballons.

c) OPERATOR den Zeitpunkt, an dem sich die Flughöhe am stärksten ändert.

	Operatoren „ERMITTELN“ oder „BESTIMMEN“	**Operatoren „Berechnen“ oder „rechnerisch Bestimmen“**
a)	Gesucht h(3). GTR liefert über eine graphische Analyse $P(3\,\vert\,335{,}2)$. Nach 3 Minuten fliegt der Ballon in einer Höhe von ca. 335,2 Metern.	Gesucht h(3). GTR liefert $h(3) = 335{,}2$. Nach 3 Minuten fliegt der Ballon in einer Höhe von ca. 335,2 Metern.
b)	Gesucht ist das globale Minimalstelle der Funktion. Der GTR gibt über eine graphische Analyse als lokalen Tiefpunkt an T(10|100). Die Betrachtung und Untersuchung des Graphen an den Rändern zeigt, dass die lokale Extremstelle auch die globale und damit gesuchte Stelle ist. Damit erreicht der Ballon nach 10 Minuten seine geringste Flughöhe.	Gesucht ist das globale Minimum der Funktion. Bestimmung der lokalen Extrempunkte: $h'(t) = 1{,}8t^2 - 18t$; $h''(t) = 3{,}6t - 18$ notw. Bed. $h'(t) = 0$ $0 = 1{,}8t^2 - 18t$ mit GTR: $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$ hinr. Bed. $h'(t) = 0 \wedge h''(t) \neq 0$ $h''(0) = -18$ <0 → H. Nicht gesucht $h''(10) = 18$ >0 → T Da für die Randwerte gilt: $h(0) = 400$ und $h(15) = 400$ ist der lokale Tiefpunkt auch der globale Tiefpunkt. Damit erreicht der Ballon nach 10 Minuten seine geringste Flughöhe.
c)	Gesucht ist die Wendestelle der Funktion und damit die Extremstelle von h‘. Der GTR gibt über eine graphische Analyse als lokalen Tiefpunkt von h‘ an: T(5|-45). An dieser Stelle gilt also: $h'(5) = -45$. Da für die Randwerte gilt: $h'(0) = 0$ und $h'(15) = 135$ gilt: Nach 5min verringert sich die Flughöhe am stärksten und zwar mit -45m/min also -0,75 m/s. Die stärkste Zunahme liegt nach 15min vor, nämlich mit 135 m/min also 2,25 m/s.	Gesucht ist die Wendestelle der Funktion. $h'(t) = 1{,}8t^2 - 18t$ und $h''(t) = 3{,}6t - 18$ und $h'''(t) = 3{,}6$ notw. Bed. $h''(t) = 0$ $0 = 3{,}6t - 18$ mit GTR: t=5. hinr. Bed. $h''(x) = 0 \wedge h'''(x) \neq 0$ $h'''(5) = 3{,}6$ >0 → W Bestimmung der Steigungen an der Wendestelle und an den Rändern: $h'(5) = -45$; $h'(0) = 0$; $h'(15) = 135$. Also gilt: Nach 5min verringert sich die Flughöhe am stärksten und zwar mit -45m/min also -0,75 m/s. Die stärkste Zunahme liegt nach 15min vor, nämlich mit 135 m/min also 2,25 m/s.

Beispiel 3 - Analysis

OPERATOR Sie den Inhalt der Fläche zwischen x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ im Intervall $[1;3]$.

	Operatoren „ERMITTELN“ oder „BESTIMMEN“	**Operatoren „Berechnen“ oder „rechnerisch Bestimmen“**
	Da f in [1;3] nach graphischer Analyse keine Nullstelle besitzt und die Fläche oberhalb der x-Achse liegt, gilt:. $A = \int_1^3 (x^2+1)dx = \frac{32}{3}$ [FE]	Da $f(x) = 0$ keine Lösung (in IR) besitzt und f(1) =2 > 0 folgt: $A = \int_1^3 (x^2+1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_1^3 = \frac{32}{3}$ [FE] Alternative: … folgt: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$ $A = \int_1^3 (x^2+1)dx = F(3) - F(1) = \frac{32}{3}$ [FE] Hinweis: In jedem Fall muss die Stammfunktion angegeben und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung angewendet werden (eckige-Klammerschreibweise oder Differenz).

Beispiel 4 - Analysis

Eine Schülerin verwendet die auf IR definierte Funktion h mit der Funktionsgleichung $h(t) = -\frac{80}{27}t^3 + \frac{40}{3}t^2 + 130$ für $0 \le t \le 3{,}5$, um den Wasserstand in cm des Rheins an der Messstelle in Bonn im Zeitraum vom 20.10.2016 0:00 Uhr bis 23.10.2016 12:00 Uhr zu modellieren.

OPERATOR Sie, wie lange der Wasserstand im betrachteten Zeitraum zwischen 140cm und 150cm lag.

	Operatoren „ERMITTELN“ oder „BESTIMMEN“	**Operatoren „Berechnen“ oder „rechnerisch Bestimmen“**
	Am Graphen lässt sich ablesen, dass im betrachteten Bereich für ungefähr $0{,}98 \le t \le 1{,}5$ gilt: $140 \le h(t) \le 150$. Damit lag der Wasserstand im betrachteten Zeitraum insgesamt ca. 0,5 Stunden zwischen 140cm und 150cm. Alternative: Bestimmung der Stellen für h(x)=140 und h(x)=150, um dann unter Verweis auf den Graphen das Intervall direkt anzugeben.	Gesucht werden die Intervalle für $0 \le t \le 3{,}5$ mit $140 \le h(t) \le 150$. Für h(x)=140 liefert der GTR im gesuchten Intervall: x≈0,98 Für h(x)=150 liefert der GTR im gesuchten Intervall: x=1,5. Mit $0 \le t \le 3{,}5$ und h(0)=130 sowie h(1,2)≈144 und h(2)≈160 ergibt sich: $140 \le h(t) \le 150$ gilt ungefähr für $0{,}98 \le t \le 1{,}5$. Damit lag der Wasserstand im betrachteten Zeitraum insgesamt ca. 1,5-0,98=0,52 [Stunden] zwischen 140cm und 150cm.

Beispiel 5 - Stochastik

Derzeit ist davon auszugehen, dass 20% aller neu zugelassenen Neuwagen weiß sind.

a) OPERATOR die Wahrscheinlichkeit, dass unter 100 zufällig untersuchten Neuwagen

- *I. genau 11 weiße Neuwagen sind.*
- *II. mindestens 30 weiße Neuwagen sind.*
- *III. höchstens 15 weiße Neuwagen sind.*
- *IV. mehr als 20 weiße Neuwagen sind.*
- *V. weniger als 90 nicht weiße Neuwagen sind.*
- *VI. mindestens 17, aber höchstens 20 weiße Neuwagen sind.*
- *VII. mehr als 30, aber maximal 40 weiße Neuwagen sind.*

b) OPERATOR die Mindestanzahl an Neuwagen, die zufällig ausgewählt werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass darunter mindestens ein weißes Auto ist, mindestens 0,99 beträgt.

	Operatoren „ERMITTELN“ oder „BESTIMMEN“	**Operatoren „Berechnen“ oder „rechnerisch Bestimmen“**
a)	vgl. „Berechnen”, „rechnerisch Bestimmen”	I $P(X=11)=Bpd(11;100;0,2)\approx 0{,}013$ II $P(X\geq 30)=Bcd(30;100;100;0,2)\approx 0{,}0112$ III $P(X\leq 15)=Bcd(15;100;0,2)\approx 0{,}1285$ IV $P(X>20)=P(X\geq 21)=Bcd(21;100;100;0,2)\approx 0{,}4405$ V p=1-0,2=0,8: $P(X\leq 90)=Bcd(90;100;0,8)\approx 0{,}9977$ VI $P(17\leq X\leq 20)=Bcd(17;20;100;0,2)\approx 0{,}3671$ VII $P(30<X\leq 40)=P(31\leq X\leq 40)=Bcd(31;40;100;0,2)\approx 0{,}0066$ Hinweis: Bpd(…) etc. wird hier nichts als GTR-Eingabe-Befehle verstanden, sondern als Dokumentation, welcher Werte für k,n und p eingesetzt werden. Alternative: Es wird auf Bpd(…) etc. verzichtet, dafür aber zuvor notiert, welche Werte für k, n und p eingesetzt werden. P(X…) muss in jedem Fall aber notiert werden.
b)	vgl. „Berechnen”, „rechnerisch Bestimmen” Auch möglich über das Graphikmenü: Ansatz: $P(X\geq 1)\geq 0{,}99 \Leftrightarrow Bcd(1;x;x;0,2)\geq 0{,}99$ GTR liefert mittels graphischer Analyse, dass ab x=21 der Wert von 0,99 überschritten wird. Damit gilt: Es müssen mindestens 21 Neuwagen ausgewählt werden.	Ansatz: $P(X\geq 1)\geq 0{,}99 \Leftrightarrow Bcd(1;x;x;0,2)\geq 0{,}99$ Der GTR liefert mittels der Tabellenfunktion: Für x=20: $P(X\geq 1)\approx 0{,}9884$ Für x=21: $P(X\geq 1)\approx 0{,}9907$ Damit gilt: Es müssen mindestens 21 Neuwagen ausgewählt werden.

Beispiel 6 – Analytische Geometrie (Vektorrechnung)

Gegeben seien die Geraden g und h mit: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -20 \\ -28 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 32 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

OPERATOR die Lagebeziehung von g und h zueinander.

Da die beiden Richtungsvektoren der Flugbahnen linear unabhängig sind, müssen g und h auf einen gemeinsamen Schnittpunkt hin untersucht werden. LGS:

	Operatoren „ERMITTELN“ oder „BESTIMMEN“	Operatoren „Berechnen“ oder „rechnerisch Bestimmen“
	Da die beiden Richtungsvektoren offenkundig linear unabhängig sind, müssen g und h auf einen gemeinsamen Schnittpunkt hin untersucht werden: Für g=h liefert der GTR für das zugehörige LGS keine Lösung. Damit sind die Geraden g und h windschief zueinander.	Prüfen der Richtungsvektoren auf lineare Abhängigkeit: $t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist nicht lösbar. Rechnerische Untersuchung auf einen Schnittpunkt: $\begin{matrix} & -20+6t=8s & & 6t-8s=20 \\ g=h \Leftrightarrow & -28+8t=32-6s & \Leftrightarrow & 8t+6s=60 \\ & t=8 & & t=8 \end{matrix}$ Der GTR liefert für dieses LGS keine Lösung. Damit sind die Geraden g und h windschief zueinander.

Beispiel 7 – Stochastische Prozesse

Drei Kaffeeröstereien konkurrieren mit ihren Kaffeesorten A, B und C um die Gunst der Käufer/innen, wobei das monatliche Wechselverhalten dieser durch die Matrix M mit

$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ beschrieben wird. Zu Beginn der Untersuchung wurde Sorte A von 150.000, Sorte B von 300.000 und Sorte C von 450.000 Personen gekauft.

a) OPERATOR die Verteilung nach einem Monat bzw. nach sechs Monaten.

b) OPERATOR die Verteilung des Vormonats, wenn in einem Monat 248550 Personen Sorte A, 338100 Personen Sorte B und 313350 Sorte C gekauft haben.

c) OPERATOR diejenige Verteilung, die stabil bleibt.

	Operatoren „ERMITTELN“ oder „BESTIMMEN“	Operatoren „Berechnen“ oder „rechnerisch Bestimmen“
a)	$\overrightarrow{v_1} = M \cdot \overrightarrow{v_0} = M \cdot \begin{pmatrix} 150000 \\ 300000 \\ 450000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 195000 \\ 330000 \\ 375000 \end{pmatrix}$ Nach einem Monat beträgt die Verteilung: 195000 Personen kaufen Sorte A, 330000 Personen Sorte B und 375000 Sorte C. $\overrightarrow{v_6} = M^6 \cdot \overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 282352{,}65 \\ 321297{,}9 \\ 296349{,}45 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 282353 \\ 321298 \\ 296349 \end{pmatrix}$ Nach drei Monaten ist die Verteilung ca.: 282353 Personen kaufen Sorte A, 321298 Personen Sorte B und 296349 Sorte C.	$\overrightarrow{v_1} = M \cdot \overrightarrow{v_0} = M \cdot \begin{pmatrix} 150000 \\ 300000 \\ 450000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 195000 \\ 330000 \\ 375000 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v_6} = M^6 \cdot \overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 282352{,}65 \\ 321297{,}9 \\ 296349{,}45 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 282353 \\ 321298 \\ 296349 \end{pmatrix}$ Alternativ: Statt einen gerundeten Vektor anzugeben, wäre auch ein Antwortsatz mit den gerundeten Werten möglich (eine Rundung muss zwingend erfolgen!).
b)	$\overrightarrow{v_{-1}} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 248550 \\ 338100 \\ 313350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 226500 \\ 339000 \\ 334500 \end{pmatrix}$ Die Verteilung des Vormonats betrug: 226500 Personen kauften Sorte A, 339000 Personen Sorte B und 334500 Sorte C.	$\overrightarrow{v_{-1}} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 248550 \\ 338100 \\ 313350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 226500 \\ 339000 \\ 334500 \end{pmatrix}$
c)	Es gilt: $M^{98} \cdot \overrightarrow{v_0} = M^{99} \cdot \overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 300000 \\ 300000 \\ 300000 \end{pmatrix}$ Die Verteilung, die dauerhaft stabil bleibt, ist in diesem Fall dann erreicht, wenn jede Sorte von 300000 Personen gekauft wird.	Ansatz: $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. GTR liefert für: $\begin{matrix} 0{,}8x + 0{,}1y + 0{,}1z = x \\ 0{,}8y + 0{,}2z = y \\ 0{,}2x + 0{,}1y + 0{,}7z = z \\ x + y + z = 900000 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -0{,}2x + 0{,}1y + 0{,}1z = 0 \\ -0{,}2y + 0{,}2z = 0 \\ 0{,}2x + 0{,}1y - 0{,}3z = 0 \\ x + y + z = 900000 \end{matrix}$ die Lösungen: x=300000, y=300000, z=300000 Die stabile Verteilung lautet daher: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 300000 \\ 300000 \\ 300000 \end{pmatrix}$